

RESPON TERHADAP GAYA SEMBARANG (TIDAK PERIODIK)

Sebelumnya, telah dibahas bahwa pada getaran terpaksa (*forced vibration*) sistem berderajat kebebasan tunggal tanpa redaman, persamaannya adalah seperti berikut :

$$m \ddot{y} + k y = F(t)$$

Juga telah diambil contoh bahwa $F(t)$ adalah fungsi yang periodik/harmonik, yaitu :

$$F(t) = F_0 \sin \Omega t$$

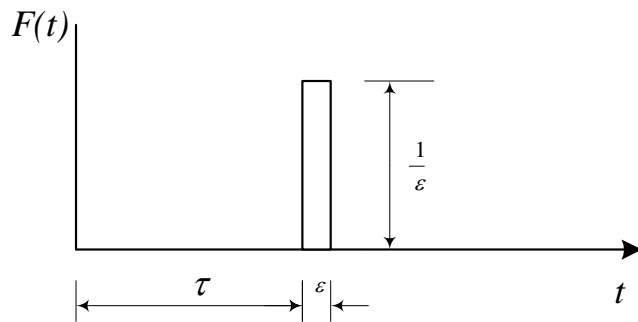
Yang dimaksud dengan fungsi harmonik adalah fungsi yang dapat dinyatakan dalam sinus atau cosinus. Pada kenyataannya, gaya luar tidak pernah harmonik ataupun periodik. Untuk gaya luar tidak harmonik/periodik yang masih sederhana, dapat diperoleh jawaban eksak/analitiknya. Untuk yang rumit, jawaban umumnya harus dicari menggunakan metode numerik.

1. Respon terhadap satu satuan impuls

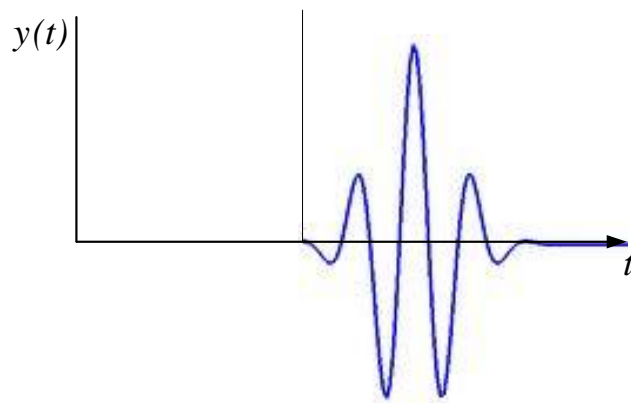
Gaya yang besar sekali namun bekerja pada waktu yang singkat disebut gaya impuls (*impulsive*). Gambar 1. menunjukkan gaya impuls sebesar $F(t) = 1/\varepsilon$ yang mulai bekerja pada saat $t = \tau$ selama ε detik. Impuls adalah gaya dikalikan dengan lamanya gaya itu bekerja, sehingga dalam Gambar 1 tersebut, besarnya impuls adalah

$$F(t) \cdot \Delta t = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$$

Dengan demikian, impuls yang terlukis dalam Gambar 1 tersebut merupakan 1 (satu) satuan impuls.



(a) Satu satuan impuls



(b) Respons

Gambar 1: Respons terhadap satu satuan impuls

Jika gaya impuls bekerja pada suatu massa m menghasilkan perubahan kecepatan (lihat Gambar 2), maka berdasarkan Hukum Newton tentang gerak, berlaku

$$m \frac{dv}{d\tau} = F(\tau)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$dv = \frac{F(\tau) d\tau}{m}$$

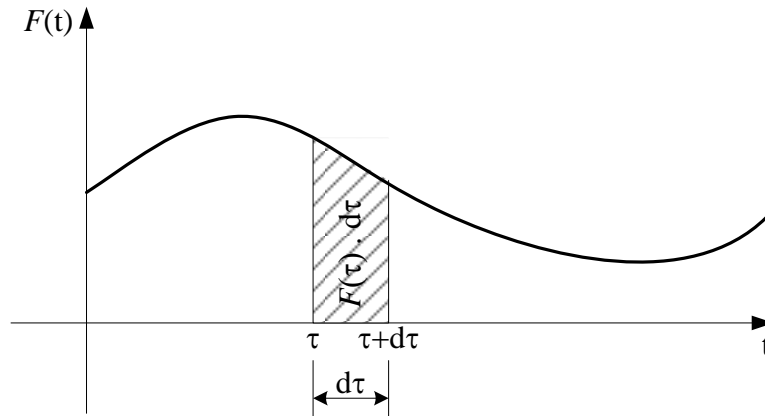
dengan $F(\tau) d\tau$ adalah impuls dan dv adalah perubahan kecepatan. Perubahan kecepatan ini dapat dianggap sebagai kecepatan awal (*initial velocity*) dari massa tersebut pada saat τ .

Seperti diketahui, jawaban terhadap permasalahan getaran bebas tanpa redaman adalah

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega t$$

Jika pada saat awal ($t = 0$), simpangan awal sama dengan nol ($y_0 = 0$) dan kecepatan awal (\dot{y}_0) sama dengan dv , maka perubahan simpangan y adalah:

$$dy = \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin \omega(t - \tau) = \frac{dv}{\omega} \sin \omega(t - \tau) = \frac{F(\tau)}{m\omega} \sin \omega(t - \tau) d\tau$$



Gambar 2: Pembebanan secara umum yang berlaku sebagai beban impuls

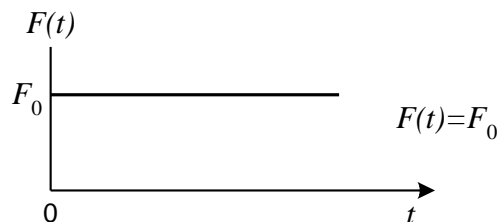
Dengan demikian, bila seluruh beban bekerja, simpangan total adalah:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin [\omega(t - \tau)] d\tau$$

Bentuk jawaban seperti di atas disebut dengan Integral Duhamel (*Duhamel's Integral*).

2. Respon Terhadap Gaya Tangga

Gaya tangga (*step force*) adalah gaya luar yang tiba-tiba loncat dari nol ke F_0 dan selanjutnya konstan pada nilai tersebut.



Gambar 3. Gaya tangga

Jadi persamaan gerak yang harus diselesaikan adalah :

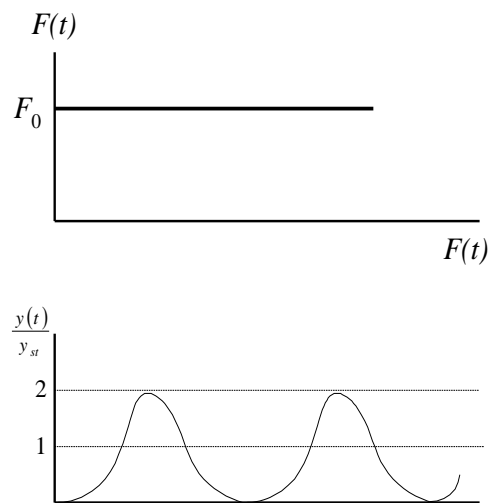
$$m \ddot{y} + k y = F_0$$

Sesuai dengan Integral Duhamel, penyelesaiannya adalah :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau \\
 &= \frac{1}{m\omega} \frac{F_0}{\omega} \cos \omega(t - \tau) \Big|_0^t \\
 &= \frac{F_0}{m\omega^2} [\cos \omega(t - t) - \cos \omega(t - 0)] \\
 &= \frac{F_0}{m \cdot \frac{k}{m}} (1 - \cos \omega t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t)
 \end{aligned}$$

$$y(t) = y_{st} (1 - \cos \omega t) \text{ atau}$$

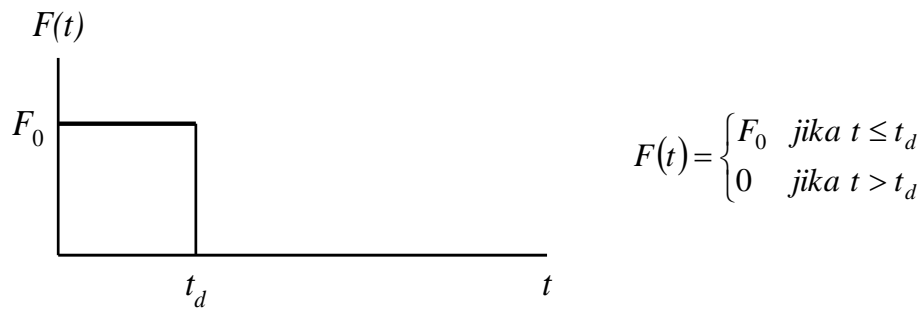
$$\frac{y(t)}{y_{st}} = (1 - \cos \omega t)$$



Gambar 4: Respons terhadap gaya tangga

Jadi, respons maksimum akibat gaya dinamik adalah dua kali lebih besar dari pada gaya statik (bekerja perlahan-lahan).

3. Respon terhadap gaya persegi



Gambar 9.4. Gaya Persegi

Pada saat $t \leq t_d$, respon sistem akan sama dengan respon sistem terhadap gaya tangga,

$$y(t) = y_{st}(1 - \cos \omega t) \text{ atau}$$

$$y = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t)$$

Kecepatan yang terjadi akibat simpangan ini adalah :

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{F_0}{k} \omega \sin \omega t$$

Sehingga, pada saat $t = t_d$, simpangan dan kecepatan menjadi :

$$y_d = \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t_d)$$

$$v_d = \frac{F_0}{k} \omega \sin \omega t_d$$

Respons setelah $t = t_d$ (atau $t > t_d$) diperoleh dengan menerapkan jawaban terhadap getaran bebas dengan mengambil keadaan sebelumnya untuk perpindahan dan kecepatan $t = t_d$ sebagai keadaan awal (*initial condition*). Untuk keadaan awal, pada $t = t_d$, $y = y_d$ dan $\dot{y} = v_d$, jawaban umum getaran bebas adalah :

$$y = y_d \cos[\omega(t - t_d)] + \frac{v_d}{\omega} \sin[\omega(t - t_d)]$$

$$= \frac{F_0}{k}(1 - \cos \omega t_d) \cos[\omega(t - t_d)] + \frac{F_0}{k} \sin \omega t_d \sin[\omega(t - t_d)]$$

$$y = \frac{F_0}{k} [\cos\{\omega(t - t_d)\} - \cos \omega t]$$

Seperti sebelumnya, faktor beban dinamis (*dynamic load factor, DLF*) merupakan perpindahan pada saat t sembarang dibagi dengan perpindahan statik $y_{st} = F_0/k$.

Dengan demikian, DLF untuk beban persegi :

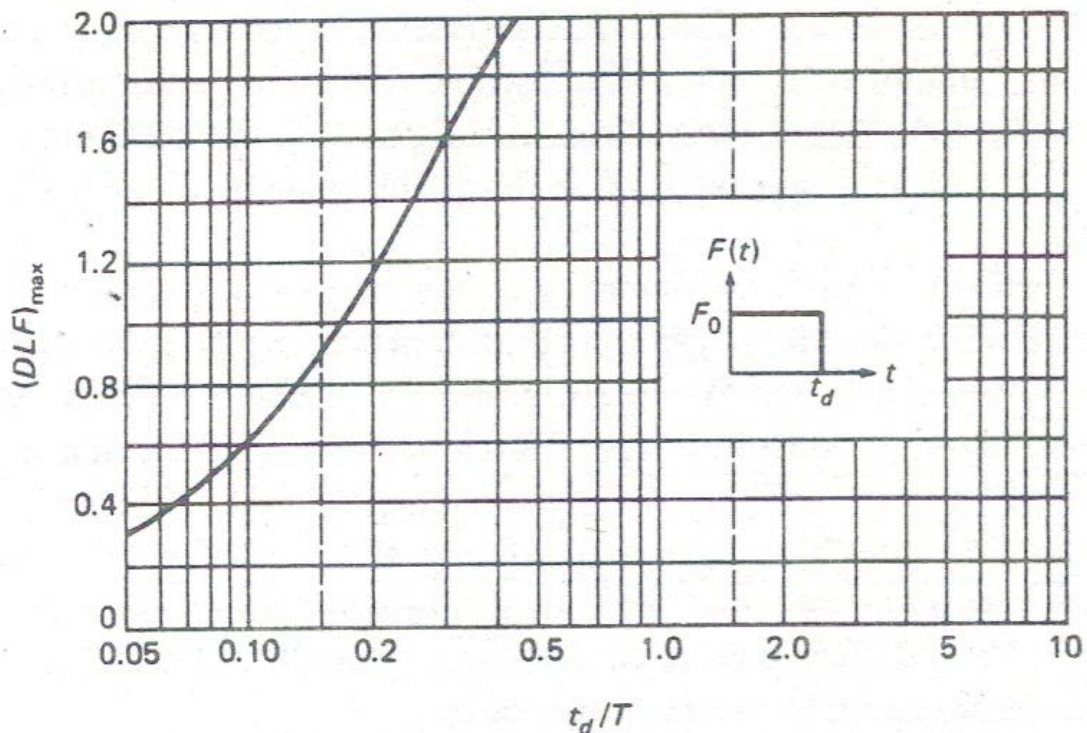
$$DLF = \begin{cases} 1 - \cos \omega t & \text{untuk } t \leq t_d \\ \cos[\omega(t - t_d)] - \cos \omega t & \text{untuk } t > t_d \end{cases}$$

Jika t dibuat tak berdimensi dengan mengingat karena $\omega = \frac{2\pi}{T}$, maka

$$DLF = \begin{cases} 1 - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{untuk } t \leq t_d \\ \cos[\omega(t - t_d)] - \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{untuk } t > t_d \end{cases}$$

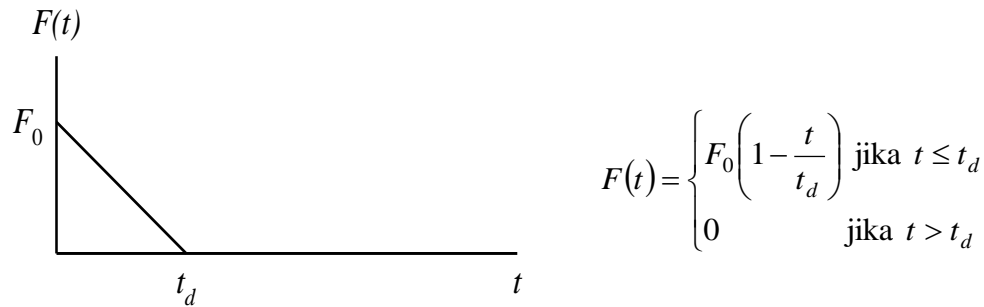
Jadi, yang menentukan besarnya DLF bukanlah t, t_d atau T , melainkan perbandingan antara parameter-parameter tersebut (yaitu $\frac{t}{T}$ dan $\frac{t_d}{T}$)

Harga maksimum dari DLF, atau $(DLF)_{\max}$, diperoleh dengan memaksimumkan persamaan tersebut. Hasilnya, diplot pada gambar berikut



Dari gambar terlihat bahwa $(DLF)_{\max}$ untuk suatu jenis pembebanan tertentu disebut kurva spectral respons (*response spectral*). Kurva ini sangat berguna untuk kepentingan perancangan.

4. Respons terhadap gaya segi tiga



Gambar 9.5. Gaya segi tiga

Untuk $t \leq t_d$, respons mengikuti integral Duhamel,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_d}\right) \sin \omega(t - \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{m\omega} \int_0^t F_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau - \frac{1}{m\omega} \int_0^t \frac{F_0}{t_d} \tau \sin \omega(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Sama seperti pada respons
Terhadap gaya tangga =

$$\frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t)$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(a - bx) dx &= \int x \left(-\frac{1}{b}\right) d[\cos(a - bx)] \\ &= -\frac{x}{b} \cos(a - bx) + \frac{1}{b} \int \cos(a - bx) dx \\ &= -\frac{x}{b} \cos(a - bx) - \frac{1}{b^2} \int \cos(a - bx) d(a - bx) \\ &= -\frac{x}{b} \cos(a - bx) - \frac{1}{b^2} \sin(a - bx) \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{m\omega} \int_0^t \frac{F_0}{t_d} \tau \sin \omega(t-\tau) d\tau &= \frac{F_0}{m\omega t_d} \frac{\tau}{\omega} \cos \omega(t-\tau) + \frac{F_0}{m\omega t_d} \frac{1}{\omega^2} \sin \omega(t-\tau) \Big|_0^t \\
&= \frac{F_0}{k t_d} \left[\frac{t}{\omega} \cos 0 + \frac{1}{\omega} \sin 0 - 0 \cdot \cos \omega t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right] \\
&= \frac{F_0}{k t_d} \left(t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right) = \frac{F_0}{k t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)
\end{aligned}$$

Hasil keseluruhan integral untuk $t \leq t_d$,

$$y(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t) + \frac{F_0}{k t_d} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

Dalam bentuk faktor beban dinamis (DLF), perpindahan di atas menjadi :

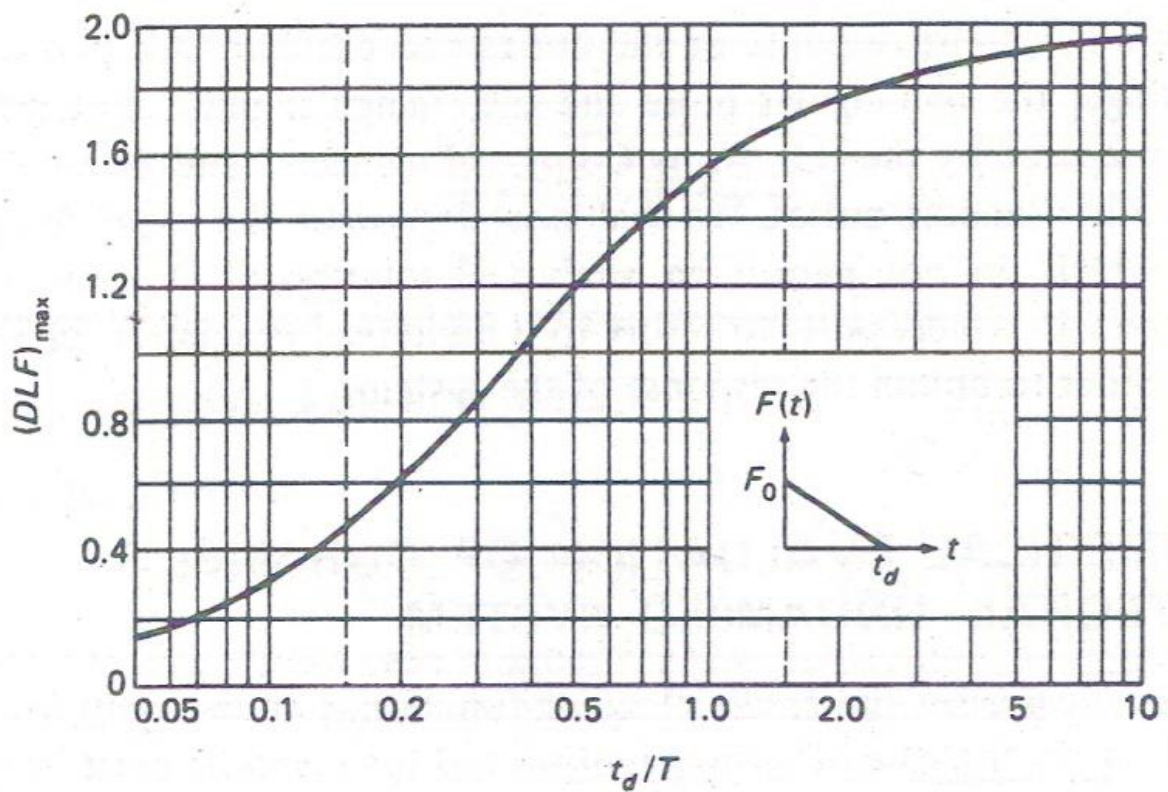
$$DLF = \frac{y}{y_{st}} = 1 - \cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{\sin \frac{2\pi t}{T}}{\frac{2\pi t_d}{T}} - \frac{t}{t_d}$$

Yang berlaku dalam selang $t \leq t_d$

Untuk $t > t_d$, benda bergetar bebas (tanpa gaya luar) dengan keadaan awal

$y_d = y(t_d)$ dan $v_d = \dot{y}(t_d)$

$$\begin{aligned}
y_d = y(t_d) &= \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_d) + \frac{F_0}{k t_d} \left(t_d - \frac{\sin \omega t_d}{\omega} \right) \\
&= \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega t_d) + \frac{F_0}{k} - \frac{F_0 \sin \omega t_d}{k t_d \omega} \\
&= \frac{F_0}{k} \left(1 - \cos \omega t_d + 1 - \frac{\sin \omega t_d}{t_d \omega} \right) \\
&= \frac{F_0}{k} \left(2 - \cos \omega t_d - \frac{\sin \omega t_d}{t_d \omega} \right)
\end{aligned}$$



TUGAS 2 (dikumpulkan Sabtu, 11 April 2015, jam 23.59)

$F_0 = 1000 \text{ kg} (1 + A/Z)$, $t_1 = 2 \text{ detik} (1+A/Z)$, $t_2 = 6 \text{ detik} (1+a/Z)$, $t_d = 8 \text{ detik} (1+A/Z)$

Harga besaran lain, ikuti besaran pada TUGAS 1

Ditanyakan: Simpangan pada $t = 1, 4, 7$ dan 12 detik

