

## DETERMINAREA VARIAȚIEI MĂRIMILOR CINEMATICE ALE PISTOANELOR ÎN BIELELOR MECANISMELOR MOTOARE

### 1. CINEMATICA PISTONULUI

Pistonul descrie o mișcare rectilinie alternativă, în lungul axei cilindrului, între cele două puncte moarte. Dat fiind caracterul alternativ al acestei mișcări, accelerațiile la care este supus pistonul au o variație importantă, care determină forțele de inerție de valoare relativ mare. Întrucât aceste forțe exercită o influență hotărâtoare asupra mișcării dinamice a motorului este avantajos ca funcțiile care descriu deplasarea, viteza și accelerația pistonului să fie exprimate sub forma unor serii trigonometrice.

#### 1.1. Deplasarea pistonului

Cu notațiile din figura 1.5 și înțelegând seama de relațiile (1.1) și (1.2), deplasarea pistonului  $x_p$ , exprimată în raport cu originea considerată în pmi, este

$$\begin{aligned} x_p &= \overline{OB_o} - (\overline{OA_o} + \overline{A_oB_o}) = \sqrt{(L+R)^2 - e^2} - (R \cos \alpha + L \cos \beta) = \\ &= R \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^2 - \delta_d^2} - \left(\cos \alpha + \frac{1}{\lambda_d} \cos \beta\right) \right] [mm]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Din triunghiurile  $AOA_o$  și  $ABC$  rezultă:

$$\overline{AA_o} = R \sin \alpha \quad \text{și} \quad \overline{AC} = L \sin \beta.$$

Se obține astfel egalitatea:

$$L \sin \beta = R \sin \alpha \pm e, \quad (2.2)$$

semnul “-” corespunzând dezaxării directe, iar semnul “+” dezaxării inverse. De aici se deduce:

$$\sin \beta = \lambda_d \sin \alpha \pm \frac{e}{L} = \lambda_d (\sin \alpha \pm \delta_d) \quad (2.3)$$

și

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda_d^2 (\sin \alpha \pm \delta_d)^2} \quad (2.4)$$

Radicalii din expresiile (2.1) și (2.4) pot fi dezvoltati în serie armonică, conform formulei binomului lui Newton:

$$(a \pm b)^n = a^n \pm C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \pm C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots \pm C_n^m a^{n-m} b^m + \dots \pm b^n,$$

unde:

$$C_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Rezultă, prin urmare:

$$\sqrt{\left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^2 - \delta_d^2} = \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-1} \delta_d^2 - \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-3} \delta_d^4 - \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-5} \delta_d^6 - \dots \quad (2.5)$$

$$\cos \beta = 1 - \frac{\lambda_d^2}{2} (\sin \alpha \pm \delta_d)^2 - \frac{\lambda_d^4}{8} (\sin \alpha \pm \delta_d)^4 - \frac{\lambda_d^6}{16} (\sin \alpha \pm \delta_d)^6 - \dots \quad (2.6)$$

Se constată faptul că, datorită valorilor subunitare ale parametrilor  $\lambda_d$  i  $\delta_d$  (de regulă,  $\lambda_d = 0,20 \dots 0,30$  i  $\delta_d < 0,1$ ), termenii de ordin superior ai celor două serii descresc rapid. Spre exemplificare, în tabelul 2.1 sunt prezentate valorile primilor patru termeni armonici ai seriilor (2.5) i (2.6) pentru  $\lambda_d = 0,25$ ,  $\sin \alpha = 1$  i diverse valori ale dezaxării specifice  $\delta_d$ .

Tabelul 2.1

Termenul armonic	$\delta_d=0$	$\delta_d=0,02$	$\delta_d=0,05$	$\delta_d=0,1$
$A_1 = 1 + \frac{1}{\lambda_d}$	5	5	5	5
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-1} \cdot \delta_d^2$	0	$4 \cdot 10^{-5}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$
$A_3 = \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-3} \cdot \delta_d^4$	0	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$6,25 \cdot 10^{-9}$	$1 \cdot 10^{-7}$
$A_4 = \frac{1}{16} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_d}\right)^{-5} \cdot \delta_d^6$	0	$1,28 \cdot 10^{-15}$	$3,125 \cdot 10^{-13}$	$2 \cdot 10^{-11}$
$B_1 = 1$	1	1	1	1
$B_2 = \frac{\lambda_d^2}{2} (\sin \alpha + \delta)^2$	$3,125 \cdot 10^{-2}$	$3,25125 \cdot 10^{-2}$	$3,4453125 \cdot 10^{-2}$	$3,78125 \cdot 10^{-2}$
$B_3 = \frac{\lambda_d^4}{8} (\sin \alpha + \delta)^4$	$4,8828125 \cdot 10^{-4}$	$5,2853125 \cdot 10^{-4}$	$5,9350879 \cdot 10^{-4}$	$7,1489258 \cdot 10^{-4}$
$B_4 = \frac{\lambda_d^6}{16} (\sin \alpha + \delta)^6$	$1,5258788 \cdot 10^{-5}$	$1,7183867 \cdot 10^{-5}$	$2,044824 \cdot 10^{-5}$	$2,7031873 \cdot 10^{-5}$

Prin urmare, din punctul de vedere al calculelor de interes practic, prezintă importanță doar armonicile de ordinul I i II. Astfel, introducând expresiile (2.5) i (2.6) în relația (2.1) a deplasării pistonului, rezultă:

$$x_p = R \left\{ 1 + \frac{1}{\lambda_d} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\lambda_d} \right)^{-1} \delta_d^2 - \left[ \cos \alpha + \frac{1}{\lambda_d} - \frac{\lambda_d}{2} (\sin \alpha \pm \delta_d)^2 \right] \right\},$$

de unde se obține expresia deplasării pistonului mecanismelor normal dezaxate:

$$x_p = R \left[ 1 - \cos \alpha + \frac{\lambda_d}{2} (\sin \alpha \pm \delta_d)^2 - \frac{\lambda_d \delta_d^2}{2(1 + \lambda_d)} \right] [\text{mm}]. \quad (2.7)$$

În cazul mecanismelor normal axate,  $\delta_d = 0$  i expresia deplasării pistonului devine:

$$x_p = R \left( 1 - \cos \alpha + \frac{\lambda_d}{2} \sin^2 \alpha \right) [\text{mm}]. \quad (2.7')$$

Cele două relații asigură determinări ale căror rezultate nu diferă cu mai mult de 1% față de valorile reale ale deplasării pistonului.

De asemenea, metodele de calcul grafic și-au pierdut în prezent importanța practică, determinarea grafică a deplasării pistonului prezintă încă un interes practic pentru proiectare, ea fiind folosită la desfurarea în coordonate  $p-\alpha$  a diagramei indicate a motorului, determinate în coordonate  $p-V$ . În acest scop, se construiește la o scară convenabilă un semicerc de diametru  $AB = 2 \cdot R$  (fig.2.1). Din centrul cercului  $O$  se determină segmentul  $OO_1 = R \cdot \lambda_d / 2$  spre punctul  $B$  (corespunzător  $pme$ ). Din punctul  $O_1$  se trasează o dreaptă care face unghiul  $\alpha$  cu diametrul  $AB$  și care intersectează

cercul în punctul M. Din M se coboară o perpendiculară pe diametrul AB, intersectându-l în punctul C. Cu notațiile din figura 2.1, se determină:

$$\overline{AC} = \overline{AO} - \overline{OC} = R - R \cos(\alpha + \psi) = R[1 - (\cos \alpha \cos \psi - \sin \alpha \sin \psi)].$$

Întrucât  $\psi$  este un unghi foarte mic, se poate face aproximația  $\cos \psi = 1$ , iar din triunghiurile  $OO_1N$  și  $MON$  se obține:

$$\overline{ON} = R \sin \psi = \frac{R\lambda_d}{2} \sin \alpha,$$

de unde:

$$\overline{AC} = R \left( 1 - \cos \alpha + \frac{\lambda_d}{2} \sin^2 \alpha \right) = x_p,$$

adică exact expresia deplasării pistonului mecanismului normal axat. Prin urmare, prin repetarea construcției grafice pentru diferite unghiuri  $\alpha$ , poate fi determinată pe cale grafică curba de variație a deplasării pistonului  $x_p = f(\alpha)$  (fig.2.2).

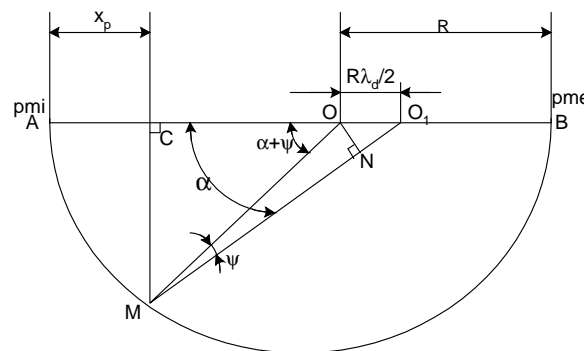


Fig.2.1

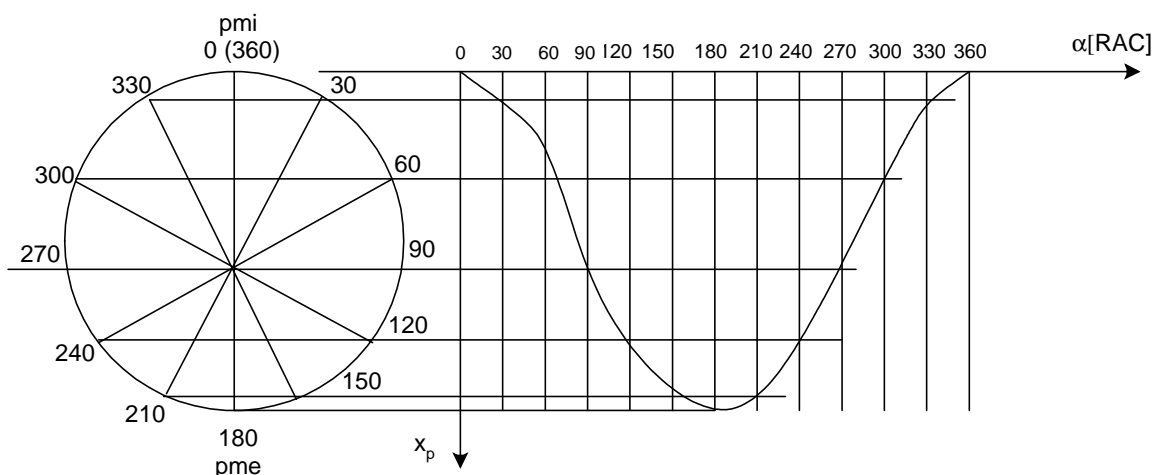


Fig.2.2

În figura 2.3 este reprezentată grafic alura curbei de variație a deplasării pistonului în funcție de unghiul de rotație al arborelui cotit, atât pentru un mecanism normal axat, cât și pentru un mecanism normal dezaxat în sens direct.

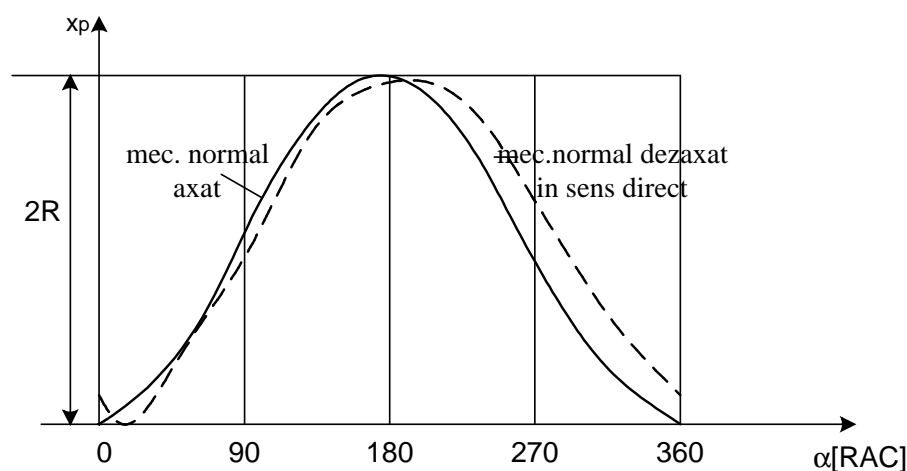


Fig.2.3

## 1.2. Viteza pistonului

Funcția care exprimă viteza pistonului se obține prin derivarea în raport cu timpul a funcției care precizează deplasarea acestuia. Pentru a exprima variația vitezei pistonului în funcție de unghiul de rotație  $\alpha$ , se derivează expresia deplasării pistonului în funcție de variabila independentă  $\alpha$ , înăd seama de faptul că derivata acesteia în raport cu timpul reprezintă, conform relației (1.4), tocmai viteza unghiulară  $\omega$  a arborelui cotit:

$$v_p = \frac{dx_p}{dt} = \frac{dx_p}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dx_p}{d\alpha}. \quad (2.8)$$

Prin urmare, considerând relația (2.7) de determinare a deplasării pistonului, prin derivarea ei în raport cu  $\alpha$ , se obține:

$$v_p = R\omega \cdot \left( \sin \alpha \pm \delta_d \lambda_d \cos \alpha + \frac{\lambda_d}{2} \sin 2\alpha \right) [\text{m/s}]. \quad (2.9)$$

În cazul mecanismului normal axat, expresia vitezei pistonului va fi

$$v_p = R\omega \cdot \left( \sin \alpha + \frac{\lambda_d}{2} \sin 2\alpha \right) [\text{m/s}]. \quad (2.9')$$

Pentru acest tip de mecanism, se observă că viteza pistonului se anulează atunci când

$$v_p = R\omega \sin \alpha \cdot (1 + \lambda_d \cos \alpha) = 0,$$

adică pentru  $\alpha = k\pi$ , ( $k=0,1,2,\dots$ ), deci în punctele moarte. Cealaltă soluție a ecuației

$$\alpha = \arccos(-\lambda_d^{-1})$$

este imposibilă, deoarece  $\lambda_d < 1$ .

Viteza maximă a pistonului se înregistrează pentru acea poziție a mecanismului pentru care:

$$\frac{dv_p}{d\alpha} = R\omega \cdot (\cos \alpha + \lambda_d \cdot \cos 2\alpha) = R\omega \cdot [\cos \alpha + \lambda_d \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1)] = 0.$$

Rezolvând această ecuație de gradul doi în  $\cos \alpha$ , rezultă:

$$\alpha_{v_p \max} = \arccos \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\lambda_d^2}}{4\lambda_d}, \quad (2.10)$$

ceea ce corespunde suficient de precis cu poziția în care biela este perpendiculară pe axa manivelei (vezi tab.2.2). În figura 2.4 este prezentată variația vitezei pistonului în funcție de unghiul de rotație  $\alpha$ , pentru două mecanisme normale: unul axat și celălalt dezaxat în sens direct.

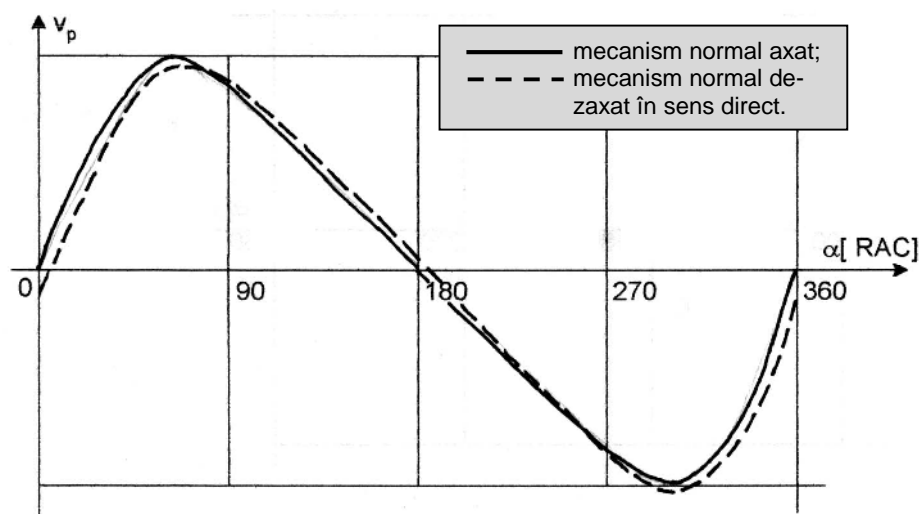


Fig.2.4

Tabelul 2.2

Unghiul	$\lambda=1/3$	$\lambda=1/3,5$	$\lambda=1/4$	$\lambda=1/4,5$	$\lambda=1/5$
$\alpha_{v_p \max}$	73°41'37"	75°31'21"	77°0'44"	78°14'33"	79°16'20"
$\alpha_{L \perp R} = \arctg(1/\lambda_d)$	71°33'54"	74°03'17"	75°57'50"	77°28'16"	78°41'24"

Criteriul care clasifică motoarele în funcție de rapiditatea acestora îl constituie viteza medie a pistonului:

$$v_{mp} = \frac{S \cdot n}{30} = \frac{2 \cdot R \cdot n}{30} \text{ [m/s]}. \quad (2.11)$$

Prin urmare, în cazul mecanismului normal axat, raportul dintre viteza maximă a pistonului și cea medie poate fi exprimat sub forma:

$$\frac{v_{p \max}}{v_{mp}} = \frac{\pi}{2} \cdot \left( \sin \alpha_{v_p \max} + \frac{\lambda_d}{2} \cdot \sin 2\alpha_{v_p \max} \right). \quad (2.12)$$

În tabelul 2.3 sunt indicate, în funcție de raportul  $\lambda_d$ , câteva valori ale acestui raport, precum și unghiurile corespunzătoare pozițiilor în care pistonul atinge viteza maximă.

Tabelul 2.3

Param.	$\lambda_d=1/3$	$\lambda_d=1/3,2$	$\lambda_d=1/3,4$	$\lambda_d=1/3,6$	$\lambda_d=1/3,8$	$\lambda_d=1/4$	$\lambda_d=1/4,2$	$\lambda_d=1/4,5$
$\alpha_{v_p \max}$	73°41'37"	74°28'19"	75°11'13"	75°50'41"	76°27'5"	77°0'44"	77°31'54"	78°14'33"
$v_{p \max}/v_{mp}$	1,6487085	1,6400768	1,632783	1,6265669	1,6212282	1,6166109	1,6125919	1,6074759

### 1.3. Accelerația pistonului

Funcția care exprimă accelerația pistonului se deduce prin derivarea în raport cu timpul a funcției care precizează viteza acestuia. Utilizând un raționament similar cu cel folosit anterior la determinarea expresiei vitezei, rezultă:

$$a_p = \frac{dv_p}{dt} = \frac{dv_p}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{dv_p}{d\alpha} = \omega^2 \cdot \frac{d^2 x_p}{dt^2}. \quad (2.13)$$

Prin urmare, derivând funcția (2.9) în raport cu variabila  $\alpha$ , rezultă expresia accelerației pistonului mecanismului normal dezaxat:

$$a_p = R\omega^2 \cdot (\cos \alpha \mp \delta_d \lambda_d \sin \alpha + \lambda_d \cos 2\alpha) \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (2.14)$$

În cazul mecanismului normal axat  $\delta_d=0$ , rezultând următoarea expresie a accelerației pistonului:

$$a_p = R\omega^2 \cdot (\cos \alpha + \lambda_d \cos 2\alpha) \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (2.14')$$

Pentru acest tip de mecanism, accelerația se anulează în acele poziții ale mecanismului pentru care viteza pistonului este maximă (precizate de relația 2.10) și are valori extreme în pozițiile mecanismului pentru care derivata accelerației se anulează:

$$\frac{da_p}{d\alpha} = -R\omega^2 (\sin \alpha + 2\lambda_d \sin 2\alpha) = -R\omega^2 \sin \alpha (1 + 4\lambda_d \cos \alpha) = 0.$$

În consecință, valorile extreme se înregistrează pentru  $\alpha=k\pi$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), adică în punctele moarte, precum și pentru:

$$\alpha_{a_p \min} = \arccos\left(-\frac{1}{4\lambda_d}\right) \quad (2.15)$$

Soluția (2.15) are sens, evident, numai pentru mecanismele caracterizate printr-un parametru  $\lambda_d > 1/4$ . Particularizând aceste soluții în ecuația (2.14'), se determină valorile extreme ale accelerației pistonului:

$$\begin{cases} a_{p_{pmi}} = R\omega^2 \cdot (1 + \lambda_d) = a_{p_{max}}; \\ a_{p_{pme}} = -R\omega^2 \cdot (1 - \lambda_d) \quad \left( = a_{p_{min}}, \text{ pentru } \lambda \leq \frac{1}{4} \right); \\ a_{p_{min}} = -R\omega^2 \cdot \left[ \frac{1}{4\lambda_d} - \lambda_d \cdot \left( 2 \cdot \frac{1}{16\lambda_d^2} - 1 \right) \right] = -R\omega^2 \cdot \left( \lambda_d + \frac{1}{8\lambda_d} \right) \quad \left( \text{numai pt. } \lambda_d > \frac{1}{4} \right) \end{cases} \quad (2.16)$$

În figura 2.5 sunt reprezentate curbele de variație a accelerației pistonului în funcție de unghiul de rotație al arborelui cotit pentru mecanisme cu  $\lambda_d \leq 1/4$  (fig.2.5.a) și, respectiv, cu  $\lambda_d > 1/4$  (fig.2.5.b). Au fost considerate, în ambele cazuri, atât mecanismul normal axat, cât și cel dezaxat în sens direct.

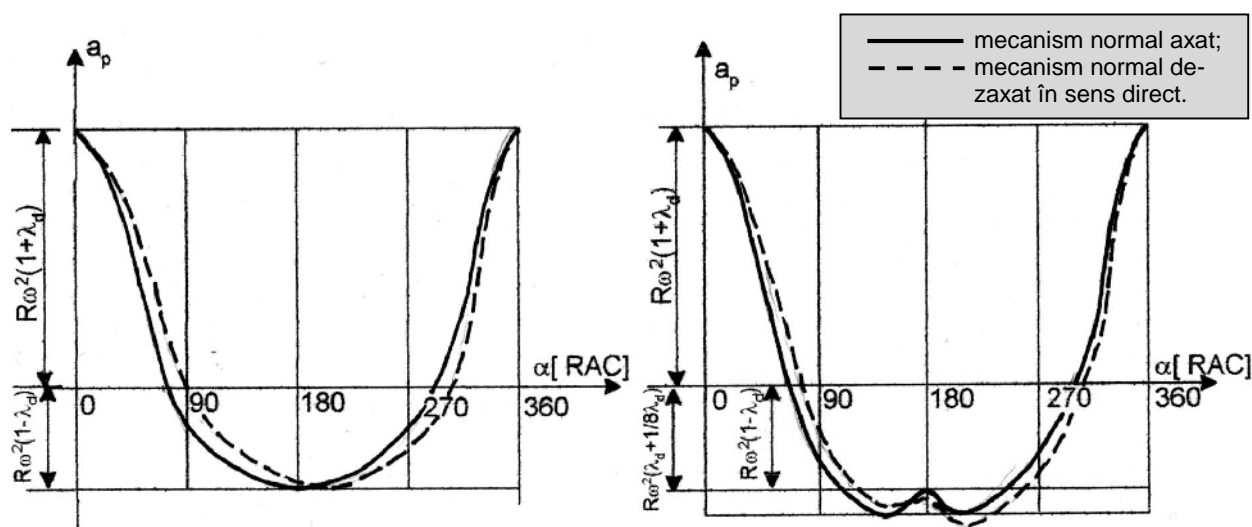


Fig.2.5

Se constată că, la mecanismele cu bielă lungă ( $\lambda_d \leq 1/4$ ), într-o rotație a arborelui cotit, accelerația pistonului trece prin două valori extreme care se înregistrează în punctele moarte. La mecanismele cu bielă scurtă ( $\lambda_d > 1/4$ ), accelerația pistonului trece prin patru valori extreme. La cele două valori anterioare, se adaugă altele două situate în vecinătatea  $pme$ , pentru  $\alpha = \arccos(-1/4\lambda_d)$ .

## 2. CINEMATICA BIELEI

Bielă execută o mișcare complexă de tip plan paralelă. Poziția bielei este determinată, în fiecare moment, de poziția axei de articulație a bielei cu pistonul (precizată în lungul axei pistonului prin cota  $x_p$ ), și unghiul de oblicitate  $\beta$  al bielei față de axa cilindrului. Conform relației (2.3), acest unghi este definit de relația

$$\beta = \arcsin[\lambda_d \cdot (\sin \alpha \pm \delta_d)] \text{ [grad]}. \quad (2.17)$$

Valoarea maximă a oblicității bielei se produce pentru valoarea maximă a funcției  $\sin(\alpha \pm \delta_d)$ , care se obține la  $\alpha = \pi/2$  și, respectiv,  $\alpha = 3\pi/2$ . La mecanismul normal axat ( $\delta_d = 0$ ):

$$\beta = \arcsin(\lambda_d \cdot \sin \alpha) \text{ [grad]}, \quad (2.17')$$

iar cele două valori extreme sunt egale în modul:

$$\beta_{\max} = -\beta_{\min} = \arcsin(\lambda_d) \text{ [grad]}. \quad (2.18)$$

În tabelul 2.4 sunt indicate valorile maxime ale oblicității bielelor mecanismelor normale și axate pentru diferite valori ale parametrului  $\lambda_d$ .

Tabelul 2.4

$\lambda_d =$	1/3	1/3,2	1/3,4	1/3,6	1/3,8	1/4	1/4,2	1/4,5	1/5
$\beta_{\max} =$	19°28'16"	18°12'36"	17°6'17"	16°7'39"	15°15'27"	14°28'39"	13°46'27"	12°50'23"	11°32'13"

Viteza unghiulară instantanee a bielei se poate determina, fie considerând mișcarea acesteia ca o succesiune de rotații infinitezimale în jurul centrului instantaneu de rotație (care descrie, la rândul său, o curbă plană), fie considerând mișcarea bielei ca o succesiune de rotații și translații infinitezimale.

Centrul instantaneu de rotație al bielei, corespunzător unei poziții arbitrare a mecanismului, se determină prelungind axa manivelei OA până ce intersectează în  $O_R$  perpendiculara ridicată pe axa cilindrului în punctul B de articulație a bielei cu pistonul (fig.2.6). Într-adevăr, vitezele extremităților bielei (punctele A și B) sunt perpendiculare pe razele care unesc aceste puncte cu centrul instantaneu de rotație  $O_R$ . Notând cu  $\omega_b$  viteza unghiulară a mișcării de rotație în jurul lui  $O_R$ , se determină:

$$\omega_b = R\omega \cdot \frac{1}{AO_R} \text{ [rad/s]}. \quad (2.19)$$

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $O_RAB$ , se obține:

$$\frac{AO_R}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AB}{\sin(90^\circ - \beta)} = L \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \quad (2.20)$$

și înlocuind această expresie în relația (2.19), rezultă formula de calcul a vitezei unghiulare a bielei:

$$\omega_b = \lambda_d \omega \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \text{ [rad/s]}. \quad (2.21)$$

La același rezultat se poate ajunge și considerând mișcarea bielei ca fiind constituită dintr-o translație identică cu cea a punctului B (articulația cu pistonul) și dintr-o rotație în jurul acestui punct.

Poziția unghiulară a bielei, în raport cu punctul B, este exprimată de unghiul  $\beta$  și, prin urmare, viteza unghiulară corespunzătoare rotației în jurul acestui punct va fi precizată de derivata, în raport cu timpul, a funcției care exprimă valoarea unghiului  $\beta$ :

$$\omega_b = \frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{d\beta}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} \text{ [rad/s]}. \quad (2.22)$$

Raportul dintre diferențialele funcțiilor  $\beta$  și  $\alpha$  se determină prin diferențierea relației (2.3):

$$\cos \beta \cdot d\beta = \lambda_d \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha. \quad (2.23)$$

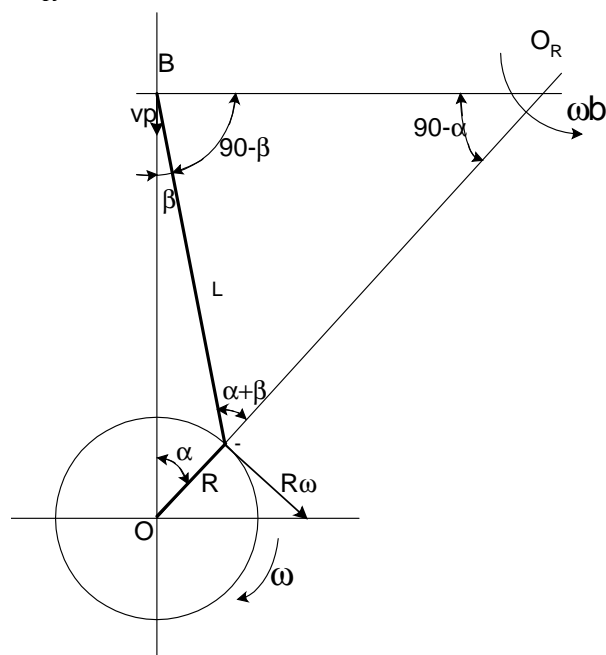


Fig.2.6

Considerând relațiile (2.22) și (2.23), se regăsește tocmai relația (2.21). Prin urmare, viteza unghiulară a bielei are aceeași valoare, indiferent de succesiunea de mișcări elementare considerate pentru descrierea mișcării plan-paralele a acesteia.

Exprimând valoarea lui  $\cos\beta$  în funcție de variabila  $\alpha$ , cu ajutorul relației (2.4), se va obține:

$$\omega_b = \lambda_d \omega \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \lambda_d^2 \cdot (\sin\alpha \pm \delta_d)^2}} \quad [\text{rad/s}]. \quad (2.24)$$

Viteza unghiulară a bielei este nulă pentru  $\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ , unde  $k=0,1,2,\dots$ , deci pentru pozițiile mecanismului în care oblicitatea bielei este maximă. Viteza unghiulară a bielei este maximă atunci când se anulează derivata în raport cu  $\alpha$  a expresiei (2.24). Această situație se produce în punctele moarte, iar pentru mecanismul normal și axat, vitezele unghiulare extreme sunt

$$\omega_{b \max} = -\omega_{b \min} = \lambda_d \cdot \omega \quad [\text{rad/s}]. \quad (2.25)$$

Accelerația unghiulară a bielei poate fi determinată prin derivarea în raport cu timpul a expresiei (2.21) a vitezei unghiulare a acesteia:

$$\theta_b = \frac{d\omega_b}{dt} = \frac{d\omega_b}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega_b}{d\alpha} = \lambda_d \cdot (\lambda_d^2 - 1) \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos^3\beta} \quad [\text{rad/s}^2]. \quad (2.26)$$

Derivând în raport cu timpul expresia (2.24) a vitezei unghiulare a bielei, se va obține formula de calcul a accelerației unghiulare a acesteia, din care este eliminată variabila  $\beta$ :

$$\theta_b = \lambda_d \omega^2 \cdot \frac{\lambda_d^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot (\sin\alpha \pm \delta_d) - \sin\alpha \cdot [1 - \lambda_d^2 \cdot (\sin\alpha \pm \delta_d)^2]}{[1 - \lambda_d^2 (\sin\alpha \pm \delta_d)^2]^{3/2}} \quad [\text{rad/s}^2]. \quad (2.27)$$

Pentru un mecanism normal și axat ( $\delta_d=0$ ), această relație se reduce la expresia

$$\theta_b = \lambda_d \cdot (\lambda_d^2 - 1) \cdot \omega^2 \cdot \frac{\sin\alpha}{[1 - \lambda_d^2 \cdot \sin^2\alpha]^{3/2}} \quad [\text{rad/s}^2]. \quad (2.27')$$

La acest tip de mecanism, accelerația unghiulară a bielei se anulează pentru  $\alpha=k\pi$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), adică în punctele moarte și este maximă pentru  $\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), adică în pozițiile de oblicitate maximă. Aceste valori extreme sunt:

$$\theta_{b \max} = -\theta_{b \min} = \frac{\lambda_d \cdot \omega^2}{\sqrt{1 - \lambda_d^2}} \quad (2.28)$$

În figura 2.7 au fost reprezentate grafic alurile curbelor de variație ale mărimilor cinematice (deplasarea  $\beta$ , viteza unghiulară  $\omega_b$  și accelerația unghiulară  $\theta_b$ ) pentru biela unui mecanism normal și axat.

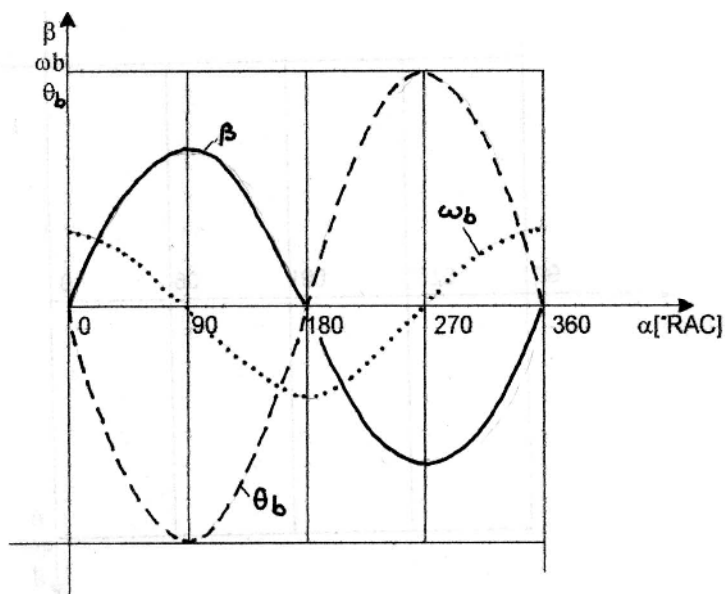


Fig.2.7



## INFORMAȚII SUPLIMENTARE<sup>1</sup>

### I.1. CINEMATICA MECANISMULUI MOTOR ÎN V, CU BIELĂ PRINCIPALĂ ȘI BIELĂ (E) SECUNDAR (E)

La motoarele cu mai mult de două linii de cilindri (în W, în X, în stea etc.) și un singur arbore cotit, fiecare cot al arborelui cotit este acționat de mai mult de doi cilindri și, ca atare, nu mai este posibilă articularea alăturată a bielor, întrucât aceasta ar conduce la o alungire inadmisibilă a cotului arborelui cotit și, implicit a motorului. În asemenea situații, precum și la unele motoare în V, se recurge la utilizarea mecanismelor cu bielă principală și bielă(e) secundară(e), numite și bielete. Avantajul unui asemenea mecanism constă în faptul că cilindrii care acționează asupra aceluiași cot al arborelui cotit sunt situați în același plan perpendicular pe axa de rotație a arborelui. Această soluție conduce la o valoare minimă a lungimii motorului.

În cadrul acestor tipuri de mecanisme, biela principală face parte dintr-un mecanism bielă-manivelă de tip normal, ale cărei caracteristici cinematice sunt cunoscute. Biela secundară acționează manivela prin intermediul bielei principale, ceea ce determină legi de mișcare ale pistonului și ale bielei secundare diferite de ale pieselor similare ale mecanismului de tip normal.

#### I.1.1. Cinematica pistonului articulat cu biela secundară

În figura I.1 este reprezentat schematic un mecanism motor cu bielă principală și bielă secundară. În cazul cel mai general, unghiul de calare a bielei secundare  $\gamma_s$  este diferit de unghiul dintre cele două linii de cilindri  $\gamma$ .

Cu notațiile din figura I.1, rezultă:

$$\alpha_s = \alpha - \gamma \text{ [°RAC]}, \quad (I.1)$$

care reprezintă unghiul de rotație corespunzător mecanismului cu bielă secundară, determinat în funcție de unghiul de rotație  $\alpha$  al mecanismului cu bielă principală și de decalajul  $\gamma$  dintre axele cilindrilor (unghiul V-ului).

Semnificațiile celorlalte notații utilizate în figura I.1 sunt următoarele:  $R$  – raza manivelei,  $L$  – lungimea bielei principale;  $l$  – lungimea bielei secundare,  $r$  – distanța dintre axa manetonului și axa bolului bielei (raza de calare);  $S$  – cursa pistonului principal;  $S_s$  – cursa pistonului secundar;  $\beta$  – oblicitatea bielei principale;  $\beta_s$  – oblicitatea bielei secundare.

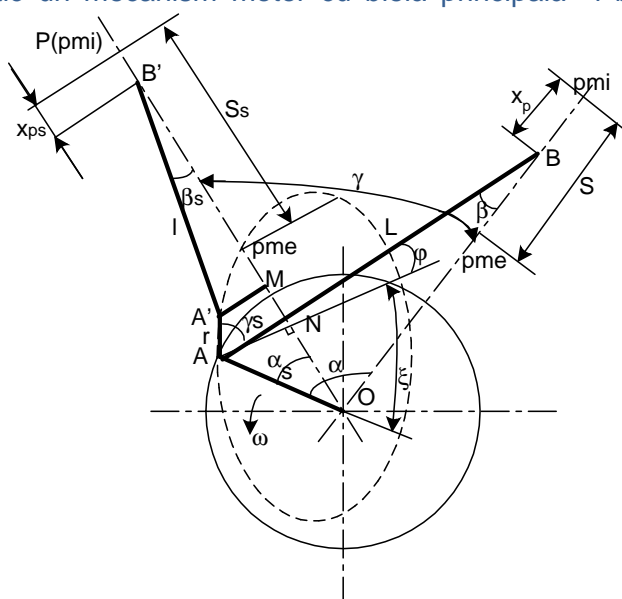


Fig.I.1

<sup>1</sup> Elementele prezentate în următoarele pagini au un caracter informativ, pentru completarea cunoștințelor referitoare la cinematica mecanismelor bielă-manivelă.

Studiul cinematic al ambielajului principal este identic cu cel al mecanismului motor normal i axat. Pentru studiul cinematic al ambielajului secundar se utilizează următorii parametri suplimentari:

$$\lambda_s = \frac{r}{l}; \quad (1.2)$$

$$\rho_r = \frac{R}{r}; \quad (1.3)$$

$$\Psi = \gamma_s - \gamma. \quad (1.4)$$

Marcând cu P poziția axei de articulație a bielei cu pistonul aferent, corespunzătoare poziției de *pmi*, deplasarea pistonului în raport cu acest punct va fi

$$x_{ps} = \overline{OP} - [R \cdot \cos \alpha_s + r \cdot \sin(\gamma_s + \varphi) + l \cdot \cos \beta_s] \text{ [mm]}. \quad (1.5)$$

Din triunghiul AOB rezultă  $\varphi = 180^\circ - (\alpha + \beta + \zeta)$ , iar din triunghiul AON  $\zeta = 90^\circ - \alpha_s$ , astfel încât:

$$\varphi = 90^\circ - (\beta + \gamma) \quad (1.6)$$

i relația de determinare a deplasării pistonului secundar devine

$$x_{ps} = \overline{OP} - R \cdot \cos \alpha_s - r \cdot \cos(\beta - \psi) - l \cdot \cos \beta_s \text{ [mm]}. \quad (1.7)$$

La rândul ei distanța,  $\overline{OP}$ , corespunzătoare poziției de *pmi* a pistonului secundar se poate determina considerând că, în acest moment, axa bielei secundare se suprapune peste axa cilindrului propriu (fig.1.2). Rezultă astfel:

$$\overline{OP} = l + r \cdot \sin(\gamma_s + \varphi^*) + R \cdot \cos \alpha_s^* \quad (1.8)$$

sau, cu ajutorul relației (1.6):

$$\overline{OP} = l + r \cdot \cos(\beta^* - \psi) + R \cdot \cos \alpha_s^*. \quad (1.9)$$

Exprimând valoarea segmentului de dreaptă  $\overline{A'N}$  (fig.1.1), perpendicular pe axa cilindrului secundar:

$$\overline{A'N} = R \cdot \sin \alpha_s = l \cdot \sin \beta_s + r \cdot \sin(\beta - \psi),$$

se deduce

$$\sin \beta_s = \lambda_s \cdot [\rho_r \cdot \sin \alpha_s - \sin(\beta - \psi)]. \quad (1.10)$$

De asemenea, oblicitatea bielei principale fiind:

$$\beta = \arcsin(\lambda_d \cdot \sin \alpha),$$

se poate scrie

$$\sin \beta = \lambda_d \cdot \sin(\alpha_s + \gamma) \quad (1.11)$$

Introducând expresiile (1.9), (1.10) și (1.11) în relația (1.7), dezvoltând în serie și reînălând primele două armonici, pentru deplasarea pistonului secundar se obține expresia aproximativă:

$$x_{ps} = R \cdot \left[ A^* - A \cdot \cos(\alpha_s + \Phi) - \frac{1}{4} \cdot B \cdot \cos(2\alpha_s - \theta) \right] \text{ [mm]}. \quad (1.12)$$

Prin derivări succesive ale relației (1.12) în raport cu timpul, rezultă și expresiile vitezei și, respectiv, accelerației acestui piston:

$$v_{ps} = R\omega \cdot \left[ A \cdot \sin(\alpha_s + \Phi) + \frac{1}{2} \cdot B \cdot \sin(2\alpha_s - \theta) \right] \text{ [m/s]}; \quad (1.13)$$

$$a_{ps} = R\omega^2 \cdot [A \cdot \cos(\alpha_s + \Phi) + B \cdot \cos(2\alpha_s - \theta)] \text{ [m/s}^2\text{]}. \quad (1.14)$$

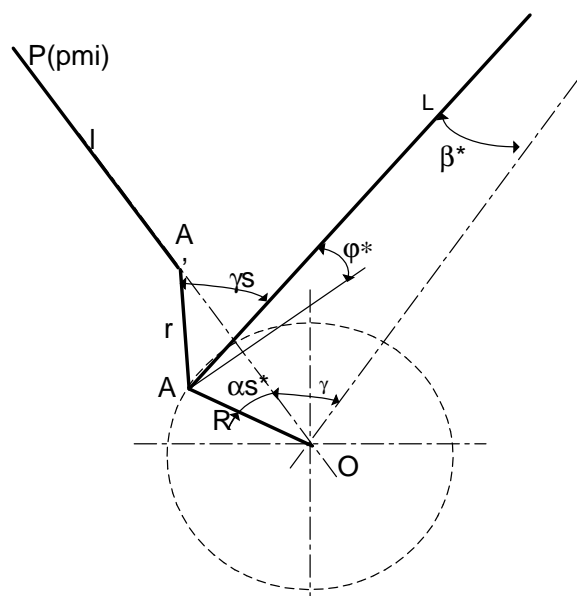


Fig.1.2

În cele trei relații, au fost utilizați parametri:

$$\begin{cases} A^* = A \cdot \cos(\alpha_s^* + \Phi) + \frac{1}{4} \cdot B \cdot \cos(2\alpha_s^* - \theta) \\ A = C / \cos \Phi; \\ B = 4 \cdot D / \cos \theta; \\ \Phi = \arctg(E/C); \\ \theta = \arctg(F/D), \end{cases} \quad (I.15)$$

unde:

$$\begin{cases} C = 1 + w \sin \gamma; \\ D = \frac{1}{4} \rho_r \lambda_s - z \cos \gamma + y \cos 2\gamma; \\ E = x \operatorname{tg} \psi - w \cos \gamma; \\ F = z \sin \gamma - y \sin 2\gamma. \end{cases} \quad (I.16)$$

La rândul lor, parametrii definiți de relațiile (I.16) se calculează cu ajutorul următoarelor valori:

$$\begin{cases} x = \left(1 - \frac{3}{8} \lambda_d^2\right) \lambda_s \cos \psi; \\ y = \frac{\lambda_d^2}{4 \rho_r} (\cos \psi + \lambda_s \cos 2\psi); \\ \omega = \frac{\lambda_d}{\rho_r} (1 + x) \sin \psi; \\ z = \frac{1}{2} \lambda_d \lambda_s \cos \psi \end{cases} \quad (I.17)$$

În ceea ce privește determinarea constantei  $A^*$  se are în vedere faptul că unghiurile corespunzătoare poziției punctelor moarte ale ambielajului secundar ( $\alpha_s^*$  pentru pmi și  $\alpha_s^{**}$  pentru pme) se determină cu relațiile :

$$\alpha_s^* = \frac{1}{2} \arctg \frac{B \sin \theta - A \sin 2\Phi}{B \cos \theta + A \cos 2\Phi} \quad (I.18)$$

$$\alpha_s^{**} = \frac{1}{2} \arctg \frac{B \sin \theta + A \sin 2\Phi}{B \cos \theta - A \cos 2\Phi} \quad (I.19)$$

### I.1.2. Cinematica bielei secundare

Plecând de la expresia (I.10), relațiile de calcul ale mărimilor cinematice ale bielei secundare vor fi:

$$\beta_s = \arcsin\{\lambda_d [\sin(\alpha_s + \varepsilon_d) - c_d]\} [\text{grad}]; \quad (I.20)$$

$$\omega_s = \lambda_s \omega \frac{\cos(\alpha_s + \varepsilon_d)}{\cos \beta_s} [\text{rad/s}]; \quad (I.21)$$

$$\theta_s = \frac{\omega^2}{\cos \beta_s} \left\{ \left[ \left( \frac{\omega_s}{\omega} \right)^2 - 1 \right] \sin \beta_{ss} - c_d \lambda_d \right\} [\text{rad/s}^2], \quad (I.22)$$

unde:

$$\begin{cases} \lambda_{\delta} = -\lambda_s \lambda_d \frac{\cos \psi \sin \gamma}{\sin \varepsilon_d}; \\ \varepsilon_d = \arctg \left( \frac{\lambda_d \cos \psi \sin \gamma}{\lambda_d \cos \psi \cos \gamma - \rho_r} \right) \\ c_d = -\frac{\lambda_s}{\lambda_{\delta}} \sin \psi. \end{cases} \quad (1.23)$$

În figura I.3 sunt reprezentate alurile curbelor de variație ale mărimilor cinematice ale pistonului secundar, iar în figura I.4 alurile curbelor de variație ale mărimilor cinematice ale bielei secundare. În ambele cazuri, reprezentările au fost efectuate comparativ cu mărimile corespunzătoare ale ambielajului principal.

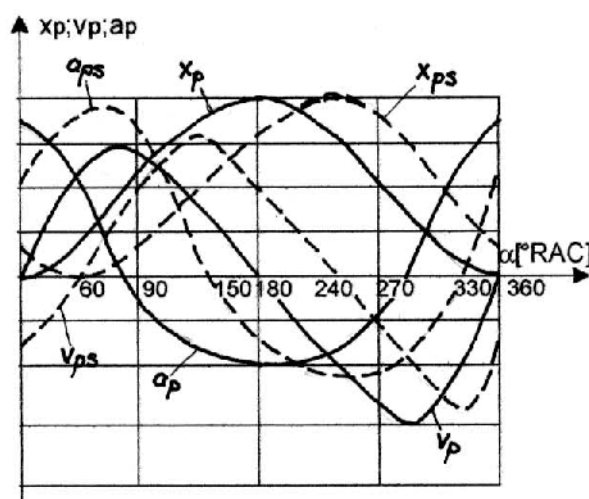


Fig.I.3

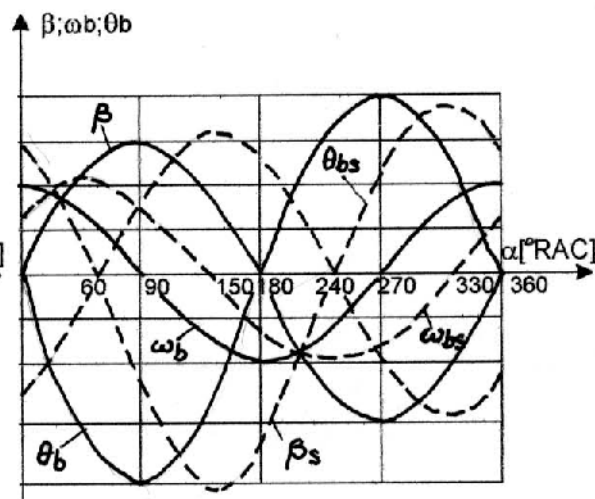


Fig.I.4

## I.2. PARTICULARITĂȚILE CINEMATICE ALE MECANISMULUI CU BIELĂ PRINCIPALĂ ȘI BIELĂ SECUNDARĂ(E)

Un mecanism bielă-manivelă de tip normal este complet caracterizat din punct de vedere cinematic prin specificarea rapoartelor  $\lambda_d$  și  $\delta_d$ . Mecanismul cu bielă principală și bielă secundară reclamă, în plus, pentru a fi complet determinat din punct de vedere cinematic, specificarea unui număr suplimentar de parametri:  $\gamma_s$ ,  $\psi$ ,  $\rho_r$  și  $\lambda_s$ . Ca urmare, se constată că există un mare număr de parametri asupra cărora se poate acționa în vederea conferirii unor anumite particularități cinematice acestui tip de mecanism. Totodată însă, între acești parametri există o strânsă intercorelație, fapt care complică mult problema optimizării, din punct de vedere cinematic și dinamic a unor asemenea mecanisme.

Întrucât mecanismele cu bielă secundară lucrează în cadrul aceluiași motor în care lucrează și mecanismul de tip normal este de dorit ca mișcările pistoanelor care acționează biețele secundare să fie cât mai apropiate, din punct de vedere cinematic, de mișcările pistoanelor care acționează biețele principale; se asigură astfel, pe cât posibil aceleași particularități ale ciclului de evoluție a fluidului motor.

Asigurarea unor condiții identice de lucru reclamă ca raportul de comprimare și masele pistoanelor să fie identice în toți cilindrii, iar punctele moarte să se realizeze atunci când axa manivelei coincide cu axa cilindrului respectiv. Satisfacerea simultană a acestor trei condiții nu este posibilă în cadrul unui asemenea mecanism. Ca urmare, este necesar să se analizeze

particularitățile cinematice și funcționale ale celor mai convenabile grupaje de parametri geometrici ai mecanismului cu biele secundare.

Grupajele cele mai frecvent întâlnite sunt următoarele:

- mecanisme cu bielă secundară calată la un unghi egal cu decalajul liniilor de cilindri ( $\gamma = \gamma_s$ );
- mecanisme care asigură simetria poziției de  $p_{mi}$  în raport cu poziția unghiulară a manivelei ( $\alpha_s^* = 0$ );
- mecanisme care asigură același raport de comprimare în liniile de cilindri ( $\varepsilon = \varepsilon_s$ ).

Prima soluție conduce la o lege de mișcare a pistonului secundar foarte apropiată de cea a pistonului principal. În plus, dacă se aleg judicios valorile  $r$  și  $l$  (astfel încât  $r+l > L$ ), este posibil să se realizeze și rapoarte de comprimare identice.

Dezavantajul soluției îl constituie faptul că, datorită abaterii unghiulare a manivelei față de poziția de  $p_{mi}$  a pistonului secundar, apar dificultăți în acționarea aparatului de injecție a motorului. Această soluție constructivă este utilizată de majoritatea motoarelor cu cilindri dispuși în stea.

Cea de-a doua soluție constructivă presupune calarea bielei secundare la un unghi  $\gamma_s = \gamma + \beta^*$  (fig. I.5) rezultând însă o abatere și mai pronunțată a poziției de  $p_{me}$  față de poziția unghiulară a manivelei. În plus, această conduce la o cursă mai mare a pistoanelor secundare față de cea a pistoanelor din mecanismul normal.

Ca urmare, unii constructori preferă în cazul motoarelor în V sau W să caleze bielele secundare la unghiuri  $\gamma < \gamma_s < (\gamma + \beta^*)$  asigurând astfel o simetrie mai bună a pozițiilor de  $p_{mi}$  în vederea evitării unor complicații constructive a aparatului de injecție a combustibilului.

În sfârșit, în cazul celei de-a treia variante, plecând de la egalitatea rapoartelor de comprimare, se poate calcula valoarea necesară pentru unghiul de calare  $\gamma_s$ . Soluția asigură abateri unghiulare foarte mici ( $< 2^\circ \text{RAC}$ ) ale poziției de  $p_{mi}$ , însă curse diferite ale pistoanelor în cele două linii de cilindri (mai mari pentru pistoanele secundare). Rezultă astfel și puteri diferite dezvoltate în cele două linii de cilindri, raportul lor fiind identic cu cel al cilindreelor respective.

La motoarele cu cilindri dispuși în stea, adoptarea acestei soluții constructive este mai incomodă, în special sub aspectul preciziei de prelucrare a bielei principale. Din această cauză, se preferă ca, în locul modificării unghiurilor de calare, să se obțină același rezultat prin modificarea razelor  $r$  de calare a bielelor secundare. Această soluție este preferabilă întrucât precizia de realizare tehnologică a cotelor liniare este superioară celei de realizare a cotelor unghiulare.

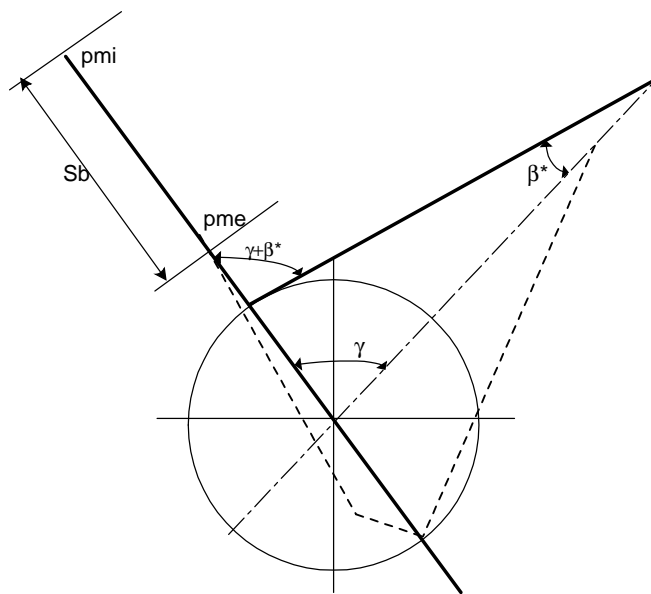


Fig. I.5