BAB VI

BARISAN TAK HINGGA DAN DERET TAK HINGGA

Banjar/Barisan Tak Hingga

Barisan tak hingga $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ adalah suatu fungsi dari n dimana daerah domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif (bilangan asli).

Contoh:

Bila n = 1, 2, 3, ……….., maka fungsi $\frac{1}{n+1}$ menghasilkan urutan atau banjar

Suku-suku $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ banjar ini disebut **Banjar Tak Berhingga** untuk menunjukkan bahwa tak ada suku terakhir. Fungsi $\frac{1}{n+1}$ disebut suku umum atau ke-n dari banjar.

Suatu banjar tak berhingga dinyatakan dengan menutup suku umum dalam kurung kurawal seperti $\left\{\frac{1}{1+n}\right\}$, atau dapat ditulis :

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{n+1}, \ldots\ldots$

Contoh lain:

1. $\{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots U_n\} \rightarrow U_n = n$
2. $\{3, 6, 9, 12, \ldots\ldots\ldots U_n\} \rightarrow U_n = 3n$
3. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots U_n\} \rightarrow U_n. = \frac{1}{n}$
4. $1, 4, 7, 10, 13, \ldots \rightarrow a_n = 3n - 2, \quad n \geq 1$
5. $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots \rightarrow a_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$
6. $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}, \frac{6}{7}, \cdots \rightarrow b_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

7. $0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots$ → $c_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \quad n \geq 1$

8. 0.999, 0.999, 0.999, 0.999, … → $d_n = 0.999, \quad n \geq 1$

Barisan $\{S_n\}$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan-bilangan P dan Q sehingga : $P \leq S_n \leq Q$ untuk semua n.

Contoh:

$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \ldots, \frac{2n+1}{2n}, \ldots$ adalah terbatas karena untuk semua n : $1 \leq S_n \leq 2$

Tetapi 2, 4, 6, ... , 2n, ... adalah tidak terbatas.

Barisan $\{S_n\}$ dikatakan **tidak turun** jika $S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq \ldots$

Dan dikatakan **tidak naik** jika $S_1 \geq S_2 \geq \ldots \geq S_n \geq \ldots$

Contoh:

Barisan

1. $\left\{\frac{n^2}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots$ adalah barisan tidak turun.
2. $\{2n - (-1)^n\} = 3, 3, 7, 7, \ldots$ adalah barisan tidak turun.
3. $\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ adalah barisan tidak naik.
4. $\{-n\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$ adalah barisan tidak naik

Limit Barisan

Jika titik-titik berurutan yang diperoleh dari barisan :

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \ldots, 2 - \frac{1}{n}, \ldots \quad (*)$$

terletak pada garis bilangan, dan untuk n cukup besar akan terletak disekitar titik 2. Keadaan seperti ini dikatakan bahwa **Limit barisan adalah 2**.

❖ Jika x adalah peubah yang jangkauannya barisan (*), maka dikatakan bahwa x mendekati 2 sebagai limit atau x menuju 2 sebagai limit dan ditulis : $x \rightarrow 2$

$$\underbrace{\lim}_{n\to\infty} U_n = \underbrace{\lim}_{n\to\infty} (2 - \frac{1}{n}) = 2$$

Kekonvergenan

Barisan $\{S_n\}$ dikatakan **konvergen** ke bilangan berhingga S sebagai limit, $\left\lfloor \lim_{n\to+\infty} S_n = S \right\rfloor$, jika untuk setiap bilangan positif $\in$, bagaimanapun kecilnya, terdapat bilangan bulat positif m sehingga untuk $n > m$ akan berlaku $|S - S_n| < \in$

Jika *suatu barisan memiliki limit,* maka disebut *barisan konvergen*.

Jika *suatu barisan tidak memiliki limit,* maka disebut *barisan divergen.*

Barisan $\{S_n\}$ dikatakan **divergen** ke ∞, $\left\lfloor \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty \right\rfloor$, jika untuk setiap bilangan positif M, bagaimanapun besarnya, terdapat bilangan bulat positif m sehingga untuk $n > m$ maka $|S_n| > M$.

Jika $S_n > M$ maka $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Jika $S_n < -M$ maka $\lim_{n\to+\infty} S_n = -\infty$.

Jadi dapat disimpulkan:

Definisi

- Barisan $\{a_n\}$ dinamakan **konvergen** menuju L atau berlimit L dan ditulis sebagai: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$
- Apabila untuk tiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga untuk
    - $n \geq N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$
- Suatu barisan yang tidak konvergen ke suatu bilangan L yang terhingga dinamakan **divergen**.

Teorema-Teorema Barisan

1. Setiap barisan tidak turun atau tidak naik dan terbatas adalah konvergen.
2. Setiap barisan yang tidak terbatas adalah divergen.
3. Barisan konvergen atau divergen akan tetap konvergen atau divergen sesudah n suku pertama dihapus.
4. Limit dari barisan konvergen adalah tunggal.

❖ Andaikan $\{s_n\}$ dan $\{t_n\}$ barisan-barisan yang konvergen dan k sebuah konsatanta, maka

Jika $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s$ dan $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t$

5. Lim $(k.s_n) = k \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = ks$ dimana k konstanta
6. $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n \pm t_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = s \pm t$
7. $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n \,.\, t_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \,.\, \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = s \,.\, t$
8. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{s_n}{t_n} \right) = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} s_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} t_n} = \dfrac{s}{t}$ jika $t \neq 0$ dan $t_n \neq 0$ untuk semua n
9. Jika $\{s_n\}$ adalah barisan suku-suku tidak nol dan jika :

   $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \infty$, maka $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{s_n} = 0$
10. Jika $a > 1$, maka $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$
11. Jika $|r| < 1$, maka $\lim\limits_{n \to +\infty} r^n = 0$

Jumlah :

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \qquad \text{..............} \; (1)$$

Dan barisan tak hingga $\{S_n\}$ disebut **deret tak hingga**.

Untuk setiap deret terdapat sebarisan jumlah parsial :

$S_1 = s_1$

$S_2 = s_1 + s_2$

$S_3 = s_1 + s_2 + s_3$

$\vdots$

$S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_n$

$\vdots$

Jika $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = s$ suatu bilangan hingga, maka deret (1) dikatakan **konvergen** dan s disebut **jumlahnya**.

Jika $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n =$ tidak ada, maka deret (1) dikatakan **divergen**.

Suatu deret adalah divergen karena $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \infty$ atau jika n membesar maka S_n membesar dan mengecil tanpa mendekati suatu limit.

<u>Contoh</u> :

Deret : $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots..$

Untuk deret ini : $s_1 = 1$, $s_2 = 0$, $s_3 = 1$, $s_4 = 0$, ……

Contoh-Contoh:

1. Gunakan Teorema 1 untuk memperlihatkan bahwa barisan $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ adalah konvergen.

   <u>Penyelesaian</u> :

   Barisan $\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ adalah terbatas karena $0 \leq S_n \leq 1$ untuk semua n. Karena :

   Jika $S_n = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$, maka :

   $$S_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   $$= 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)}$$

   $$= S_n + \frac{1}{n(n+1)}$$

   Berarti bahwa $S_{n+1} \geq S_n$, merupakan barisan yang tidak turun.

Jadi barisan ini konvergen ke $s = 1$

2. Gunakan Teorema 1 untuk memperlihatkan bahwa barisan $\left\{\dfrac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)}\right\}$ adalah konvergen.

   Penyelesaian :

   Barisan $\dfrac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)}$ adalah terbatas, karena $0 \le S_n \le 1$ untuk semua n.

   Karena :

   Jika $S_n = \dfrac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.8.....(2n)}$

   Maka :

   $$S_{n+1} = \frac{1.3.5.7.....(2n+1)}{2.4.6.8.....(2n+2)}$$

   $$= \frac{2n+1}{2n+2}.S_n$$

   Berarti barisan ini tidak naik, jadi barisan konvergen ke $s = 0$

3. Limit dari barisan konvergen adalah **tunggal**.

   Misalkan berlaku kebalikannya sehingga:

   $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = s$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = t$, dimana $|s - t| > 2\varepsilon > 0$

   Lingkungan ε dari s dan t mempunyai sifat-sifat yang saling berkontradiksi :

   i) Tidak memiliki titik-titik persekutuan
   ii) Masing-masing memiliki semua suku-suku barisan kecuali sejumlah berhingga dari suku-suku tersebut.

   Jadi $s = t$ dan limitnya adalah tunggal.

4. Jika $a > 1$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$

   Ambil $M > 0$, betapapun besarnya.

Misalkan $a = 1 + b$ dimana $b > 0$, maka :

$$a^n = (1+b)^n$$

$$= 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1.2} b^2 + \ldots\ldots > 1 + nb > M$$

Jika $n > \dfrac{M}{b}$

Karena $a^n > M$ dan jika $n > \dfrac{M}{b}$ untuk M betapapun besarnya maka

$$\lim_{n \to \infty} a^n = +\infty$$

5. Deret aritmatika tak hingga $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots.. + [a + (n-1)d]$ divergen jika $a^2 + d^2 > 0$

   Untuk deret $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots.. + [a + (n-1)d]$

   $S_n = \frac{1}{2} n\,[2a + (n-1)d]$ dan $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \infty$

   Kecuali untuk $a = d = 0$

   Jadi deret divergen jika $a^2 + d^2 > 0$

6. Deret geometri tak hingga $a + ar + ar^2 + \ldots.. + ar^{n-1} + \ldots..$, dimana $a \neq 0$

   Konvergen ke $\dfrac{a}{1-r}$ jika $|r| < 1$ dan divergen jika $|r| \geq 1$

   Untuk deret $a + ar + ar^2 + \ldots.. + ar^{n-1}$:

   $$S_n = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

   $$= \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} r^n \quad , \quad r \neq 1$$

   Jika $|r| < 1$, maka $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$ sehingga $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$

   Jika $|r| > 1$, maka $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = \infty$ sehingga S_n divergen.

   Jika $|r| = 1$, deretnya berbentuk $a + a + a + a + a + \ldots\ldots\ldots$

   Atau $a - a + a - a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots$ yang divergen.

7. Untuk deret $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$,

   Jumlah bagiannya adalah :

   $S_4 > 2$

   $S_8 > 2\frac{1}{2}$

   $S_{16} > 3$

   $S_{32} > 3\frac{1}{2}$

   $S_{64} > 4$

   $\vdots$

   Jadi barisan jumlah-jumlah bagiannya tidak terbatas dan divergen, Jadi deretnya divergen.

Uji Konvergensi dan Divergensi dari Deret Positif

I. Uji Integral

Misalkan $f(n)$ menyatakan suku umum S_n dari deret $\sum S_n$ yang suku-sukunya semua positif. Jika $f(x) > 0$ dan tidak pernah naik dalam interval $x > \xi$, dimana ξ suatu bilangan bulat positif, maka deret $\sum S_n$ konvergen atau divergen tergantung kepada apakah $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$ ada atau tidak ada.

II. Uji Banding untuk Konvergensi

Suatu deret positif $\sum S_n$ adalah konvergen jika setiap suku (mungkin sesudah sejumlah berhingga) adalah lebih kecil atau sama dengan suku yang bersesuaian dari suatu deret positif konvergen yang diketahui $\sum c_n$

III. Uji Banding untuk Divergensi

Suatu deret positif $\sum S_n$ adalah divergen jika setiap suku (mungkin sesudah sejumlah berhingga) adalah sama dengan atau lebih besar dari suku yang bersesuaian dari suatu deret positif divergen yang diketahui $\sum d_n$

IV. Uji Rasio

Deret positif $\sum S_n$ konvergen jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} < 1$, dan divergen jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} > 1$. Jika $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ uji ini tidak dapat dipakai.

<u>Contoh</u> :

Selidiki konvergensi dari : $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$

Dengan menggunakan uji integral.

<u>Penyelesaian</u> :

$$f(n) = S_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} , \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Ambil $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$

Pada interval $x > 1$, $f(x) > 0$ dan menurun jika x naik.

Ambil $\xi = 1$ dan pandang :

$$\int_1^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{u \to +\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{u \to \infty} \sqrt{2x+1}\,\Big|_1^u$$

$$= \lim_{u \to \infty} \sqrt{2u+1} - \sqrt{3} = \infty$$

Nilai integralnya tidak ada, jadi deret divergen.

<u>Soal</u> :

Dengan menggunakan uji integral selidiki kekonvergensian dari :

1. $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \ldots$

2. $\sin\pi + \frac{1}{4}\sin\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\sin\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{16}\sin\frac{1}{4}\pi + \ldots$

3. $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \ldots \;(p > 0)$

Uji Banding

Suku umum dari deret yang diketahui yang akan diuji konvergensinya akan dibandingkan dengan suku umum dari deret yang diketahui konvergensinya atau divergensinya. Deret-deret berikut akan berguna sebagai deret uji :

a) Deret geometri $a + ar + ar^2 + \ldots.. + ar^n + \ldots..$, dimana $a \neq 0$ akan konvergen jika $0 < r < 1$ dan divergen jika $p \geq 1$.

b) Deret $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$

   konvergen jika $p > 1$ dan divergen jika $p \leq 1$

<u>Contoh</u> :

Selidiki konvergensi dari : $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$

Dengan menggunakan uji banding.

<u>Penyelesaian :</u>

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$$

Suku umum $S_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$

Jadi suku-suku deret ini adalah lebih kecil dari suku-suku deret :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \quad \text{yang konvergen karena } p = 2$$

Jadi deret yang diketahui juga konvergen. (Uji integral juga dapat digunakan disini)

<u>Lanjut Soal</u> :

Dengan menggunakan uji banding, selidiki konvergensi dari :

4. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

5. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

Tugas

Selidiki konvergensi dari deret-deret dengan menggunakan uji banding :

1. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \cdots$

2. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$

3. $1 + \frac{2^2+1}{2^3+1} + \frac{3^2+1}{3^3+1} + \frac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$

Uji Rasio

Deret positif $\sum S_n$ konvergen jika $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} < 1$

Dan divergen jika $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$.

Jika $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = 1$ uji ini tidak dapat dipakai

<u>Contoh</u> :

Dengan menggunakan uji rasio, selidiki konvergensi dari : $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$

<u>Penyelesaian</u> :

Suku umum $S_n = \frac{n}{3^n}$, maka $S_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}}$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \frac{n+1}{3n}$$

Maka $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$ sehingga deret konvergen

<u>Lanjut Soal</u> :

Dengan menggunakan uji rasio, selidiki konvergensi dari :

6. $\frac{1}{3} + \frac{2!}{3^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{3^4} + \cdots$
7. $1 + \frac{1.2}{1.3} + \frac{1.2.3}{1.3.5} + \frac{1.2.3.4}{1.3.5.7} + \cdots$
8. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{4.2^4} + \cdots$
9. $2 + \frac{3}{2}\,\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}\,\frac{1}{4^3} + \cdots$

Tugas:

1. Tentukan apakah konvergen atau divergen dengan uji integral :

   a). $\sum \frac{1}{n}$ b). $\sum \frac{50}{n(n+1)}$ c). $\sum \frac{1}{n \ln n}$ d). $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

2. Tentukan apakah konvergen atau divergen dengan uji banding :

   a). $\sum \frac{1}{n^3 - 1}$ b). $\sum \frac{n-2}{n^3}$ c). $\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ d). $\sum \frac{1}{n^2 + 5}$

3. Tentukan apakah konvergen atau divergen dengan uji rasio :

   a). $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ b). $\sum \frac{5^n}{n!}$ c). $\sum \frac{n}{2^{2n}}$ d). $\sum \frac{3^{2n-1}}{n^2 + n}$

4. Tentukan apakah konvergen atau divergen :

a). $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{13^2} + \cdots$

b). $3 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{3}} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} + \cdots$

c). $\frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{5.6.7.8} + \cdots$

d) $3 + \frac{3}{4} + \frac{11}{27} + \frac{9}{32} + \cdots$